52a. de groepen verschillen sterk in grootte
b. 100 van de 5000 = 1 van de 50
dus 1 directielid, 90 winkelmedewerkers en 9 magazijnmedewerkers.

Boek 2 hoofdstuk 8 De normale verdeling.

8.1 Vuistregels bij de normale verdeling

1a. 155-< 160 ; 160-< 165 t/m 185-< 190 (dus per 5 cm, vanaf 1,55 t/m 1,90)
b. 1000 personen (getallen boven staven optellen)
c. L1 = klassemiddens = 157,5 ; 162,5 ; enz t/m 187,5
L2 = freq. = getallen boven staven
σ **x** (namen standaard deviatie en standaard afwijking is hetzelfde)
$\overline{X}$ = gemiddelde = μ (spreek uit mu) = 172,3 cm
σ x =standaardafwijking = 5,7 cm (de meeste mannen zitten tussen 166,6 en 178 cm
n = aantal waarnemingen = 1000
d. σ **x** (namen standaard deviatie en standaard afwijking is hetzelfde)
680/1000 = 68% **e.** 95 %
2a. klassenbreedtes van 1 cm **b.** 375 (aflezen grafiek)
c. nee, alleen al de groep van 170 tot 175 bestaat uit $5 * 370$ personen

4 zie vuistregel blz 188, die heb je bij de komende sommen nodig
a. $\mu - 2 * \sigma$ x = 50 $\mu - \sigma$ x = 60 $\mu = 70$ $\mu + \sigma$ x = 80 $\mu + 2 * \sigma$ x = 90
b. 68 % **c.** 95% **d.** 2,5% **e.** 47,5%

6. 16% = 2,5% + 13,5% , dus 76 gram = $\mu - \sigma$ x invullen $\mu = 80$ gr. $\Rightarrow \sigma$ x = 4 gr.

7a. Het gemiddelde μ zie je bij 50%, **b.** $\mu + \sigma$ x = 84 % (want 50% + 34%)
c. $\mu = 68$ uur en $\mu + \sigma$ x = 75 uur dus **d.** σ x = 7 uur

9a. De top ligt bij allebei op hetzelfde getal 167cm.
b. standaardafwijking is groter bij de groene lijn, die wijkt verder uit
c. De oppervlakte onder beide grafieken is even groot, dus platter, dan ook breder
d. De lijn heeft dezelfde vorm en hoogte en breedte als lijn A, maar is naar links verschoven. (top boven het gemiddelde van lijn C)

10a. lijn A, de reactie tijd van jonge mensen is korter dan van oudere mensen.
b. lijn C, de 60 jarigen want σ x is bij deze lijn het grootst

11a. $\mu = 65$ σ x = 1 **b.** $\mu = 66,5$ σ x = 1
c. $\mu = 67,5$ σ x = 1,25 **d.** $\mu = 70$ σ x = 1

8.2 Oppervlakte onder de normaalkromme

GR:Gebruik steeds Opp = 2nd VARS = distr Distr 2: normalcdf(l, r, μ, σ)
Met l = linkergrens (gegeven of 0 of -10^{99}), r = rechtergrens (gegeven of 10^{99})
Let goed op afronden op 4 decimalen, rond het laatste cijfer goed af.

12a. $\mu - \sigma$ x = 12 en $\mu - 2 * \sigma$ x = 9 het gebied is 13.5%
b. Het gebied is 100 – 2.5 = 97.5%
c. Het gebied is 2 ∗ 2.5 = 5% **d.** Het gebied is 50 + 34 = 84%

13a. normalcdf(l, r, μ, σ) = normalcdf(925, 970, 950, 20)= 0.7357
b. normalcdf(2.6 , 3.9 , 2.8 , 0.7) = 0.5544
c. normalcdf(7.1 , 10^{99}, 8.6, 1.3)= 0.8757
d. normalcdf(-10^{99}, 130, 150, 12)= 0.0478

14a. normalcdf(1000, 1100, 1080, 60)= 0.5393
b. normalcdf(-10^{99}, 5, 3.5, 1.1) = 0.9137
c. normalcdf(700, 10^{99}, 850, 120) = 0.8944

15a. normalcdf(-10^{99}, 16, 17.1, 1.8) = 0.2706
b. normalcdf(13.4 , 10^{99}, 11, 2) =0.1151
c. normalcdf(0.03, 0.05, 0.04, 0.012) = 0.5953

16a. normalcdf(-10^{99}, 28, 21, 4) = 0.9599
b. normalcdf(17.5, 10^{99}, 21, 4) = 0.8092
c. normalcdf(16.8, 18.7, 21, 4) = 0.1359

17a. normalcdf(-10^{99}, 480, 520, 18)= 0.0131
b. normalcdf(510, 10^{99},520, 18) = 0.7107
c. normalcdf(518, 541, 520, 18) =0.4226

18a. normalcdf(9.8, 10^{99}, 8.7, 1.6) = 0.2459 → 24,59%
b. normalcdf(-10^{99}, 5.1, 8.7, 1.6) = 0.0122 → 1.22%
c. normalcdf(9.1, 12.3, 8.7, 1.6) = 0.3891 → 38.91 %

19a. normalcdf(-10^{99}, 12, 16, 3) = 0.09121
b. normalcdf(12, 10^{99},16, 3) = 0.9088
c. totaal = 1 of 100%

GR, als je de opp weet, en μ en σ, en je zoekt de rechtergrens, kies je
2nd VARS = distr Distr 3: invnorm(Opp, μ, σ) = a (= rechtergrens)
Zoek je de linkergrens, dan doe je eerst hetzelfde, maak een schets en spiegel, zie Uitleg blz 108 Rond a altijd af op 1 decimaal meer dan de gegeven μ.

20a. Opp = 0,3 μ = 16 σ = 2 a = invnorm(0.3, 16, 2) = 14.95
b. Opp = 0,7, ivm linkergrens opp = 0.3 μ = 50 σ = 8 invnorm(0.3, 50, 8) = 45.8
c. Opp = 0,86 μ = 600 σ = 70 a = invnorm(0.86, 600, 70) = 675.6
d. Opp = 0,08 ivm linkergrens opp = 0.92 μ = 0,8 σ = 0,2 invnorm(0.92, 0.8, 0.2) = 1,08

21a. bij a =z = 0,333 en bij b = z = 0,667 (elk stuk 33,3%)
b. invnorm(0.333, 40, 5)= 37,8 = a en invnorm(0.667, 40, 5)= 42,2
(linkergrens en rechtergrens allebei op 2,2 afstand van m = 40)

22a. bij a =z = 0,2 en bij b = z = 0,4 (elk stuk 20%)
b. invnorm(0.2, 1000, 50)= 958 = a en invnorm(0.4, 1000, 50)= 987
c = 1000 + 13 = 1013 d = 1000 + 42 = 1042
(linkergrens en rechtergrens op dezelfde afstand van μ = 1000)

23a. Opp = 0.5 $\rightarrow$ linkergrens =0.25 en rechtergrens = 0.75
invnorm(0.25, 18, 2) = 16.65 (linkergrens) en 19.35 (rechtergrens)
b. Opp = 0.82 $\rightarrow$ linkergrens =0.09 en rechtergrens = 0.91
invnorm(0.09, 150, 12) = 133.9 (linkergrens) en 166.1 (rechtergrens)
c. Opp = 0.12 $\rightarrow$ linkergrens =0.06 en rechtergrens = 0.94
invnorm(0.06, 58, 6) = 48.7 (linkergrens) en 67.3 (rechtergrens)

24. Bij dit soort opdrachten heb je de volgende formules nodig,
(andere methode dab het boek geeft, die je moet kunnen):
opp = normalcdf(l, r, μ, σ)
z = invnorm(opp)
en z = $\frac{X-\mu}{\sigma}$ **, met X = score**
Dit is een stappenplan: *bereken* σ

z = invnorm(0.78) = 0.7722 en $z = \frac{450-400}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{450-400}{0.7722} = 64.75$

25. Dit is een stappenplan: *bereken* μ
z = invnorm(0.08) = -1.4051

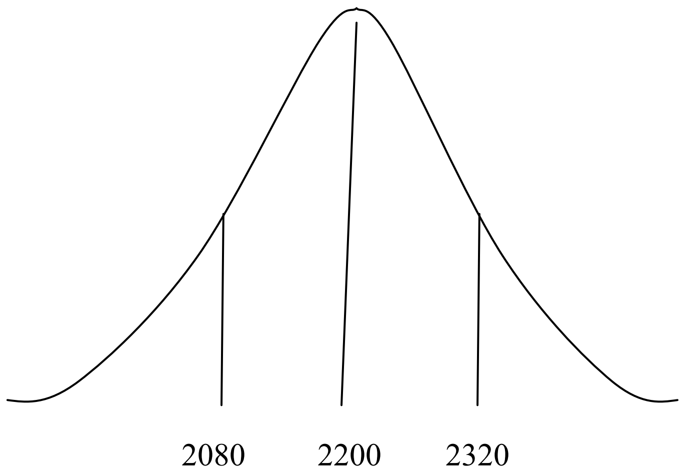
$z = \frac{170-\mu}{12} \Leftrightarrow -1.4051 = \frac{170-\mu}{12} \Leftrightarrow -1.4051 * 12 = 170 - \mu \Leftrightarrow -16.861-170 = -\mu \Leftrightarrow$

186.861= μ Je moet dit ver afronden, bv μ = *187 of 186.9*

26. zie 25. *bereken* μ
Omdat de oppervlakte rechts wordt gegeven, moet je daar eerst de oppervlakte links van make, dus 1 – 0.28 = 0.72 $\Rightarrow$ *z = invnorm(0.72)=0.5828*

$0.5828 = \frac{17-\mu}{3.8} \Leftrightarrow 0.5828 * 3.8 = 17 - \mu \Leftrightarrow 2.215-17 = -\mu \Leftrightarrow 14.8 = \mu$

27 als je een schets maakt, zie je dat 2080 net zo ver links van 2200 ligt als 2320 er rechts van ligt. De opp. = 0.62, de halve opp = 0.31, de linkergrens = 0.19



z = invnorm(0.19)= -0.878 dus -0.878= $\dfrac{2080-2200}{\sigma}$ en $\sigma = \dfrac{-120}{-0.878} = 136$

28 oppervlakte rechts, dus links = 0.59 en z = invnorm(0.59) = 0.2275

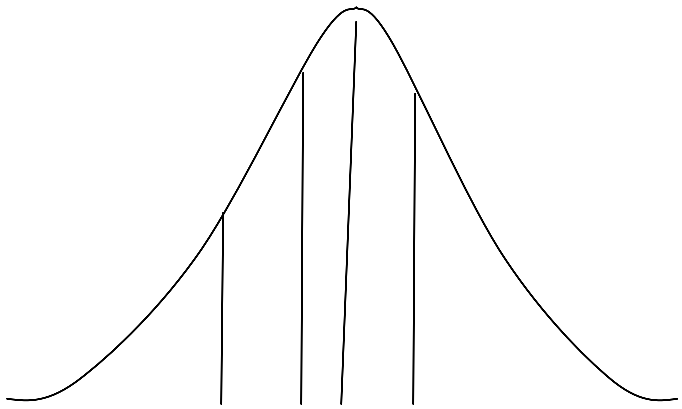
a. $0.2275 = \dfrac{14.6-\mu}{3.5} \Leftrightarrow 0.2275 * 3.5 = 14.6 - \mu \Leftrightarrow \mu = 13.8$

b. $0.2275 = \dfrac{14.6-12.3}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \dfrac{14.6-12.3}{0.2275} \Leftrightarrow \sigma = 10.1$

29a. normalcdf(82, 10^{99}, 75, 4.8) = 0.0723
b. normalcdf(70, 83, 75, 4.8) = 0.8034
c. opp rechts, dus links = 0.17 invnorm(0.17, 75, 4.8) = 70.4 = a
d. 4 stukken van 25%, dus eerste linkergrens = 0.25
invnorm(0.25, 75, 4.8) = 71.8 = b , c = 75 en d = 78.2

30a. het hele gebied links van 30.5 = normalcdf(-10^{99}, 30.5, 28, 4.3) = 0.72
Het oranje gebied = 0.36
Het gebied links van a is dus ook 0.36
Invnorm(0.36, 28, 4.3) = 26.5 = a
b. links van b ligt 0.72 + 0.19 = 0.91 van de opp.
Invnorm(0.91, 28, 4.3) = 33.8 = b

31 maak een schets $\mu = 2.3 en \sigma = 0.08$



2.18 **a** 2.3 2.36

Opp. gebied links van 2.18 = normalcdf(-10^{99} , 2.18, 2.3, 0.08) = 0.0668

Opp. gebied links van 2.36 = normalcdf(-10^{99} , 2.36, 2.3, 0.08) = 0.7734

Opp gebied normalcdf(2.18, 2.36, 2.3, 0.08) = 0.7066

Halve Opp gebied = 0.3533

Lijn **a** loopt bij 0.3533 + 0.0668 = 0.42

8.3 Toepassingen normale verdeling

Deze sommen zijn een heel goede oefening voor de toets.
Je gebruikt steeds
normalcdf(linkergrens, rechtergrens, m, s) wanneer je het % of de opp of de kans wilt berekenen
de formule z = $\frac{X-\mu}{\sigma}$ wanneer je X , μ, of σ moet berekenen.
Heel vaak moet je dan eerst z uitrekenen met z = invnorm(opp)
Schets steeds de normale verdeling en zet je gegevens erin.

32a. X = 182, μ = 178, σ = 5,4 normalcdf (0,182,178,5.4) =0,7705
b. (1**-**0,7705) $*$ 100 = 22,9% **c.** 0,229 **=**22,9% **(hetzelfde dus)**

33a. X = 2,85 μ = 3 σ = 0,2 normalcdf(0, 2.85, 3, 0.2)=0,2266
Minder dan 2,85 kg = 22,7%
b. normalcdf(2.95, 3.05, 3, 0.2)= 0,1974
dus gewicht tussen 2,95 en 3,05 kg = 19,74%
c. X = 2,9 (want rechtergrens van 3,1 is hetzelfde als linkergrens van 2,9 bij μ = 3)
μ = 3 σ = 0,2 normalcdf(0, 2.9, 3, 0.2)=0,3085
Minder dan 2,9 kg = Meer dan 3,1 kg = 30,9% P(meer dan 3,1 kg) = 0,309
Je kan ook kiezen normalcdf (3.1, 100, 3 , 0.2) =0,3085
d. P(meer dan 3,1 kg) = 0,309 dus 0,309$*$450 =139 zakken met meer dan 3,1 kg
e. opp gebied links van 2.7 dus normalcdf(0, 2.7, 3, 0.2) = 0.0668 d.i. 6.7%

34a. X =80, μ=75, σ = 9 normalcdf(0, 80, 75, 9)= 0,7107, mindeer dan 80 kg $\Rightarrow$ 100 - 71,1 = 28,9% meer dan 80 kg
b. 1 **-** normalcdf(60, 90, 75, 9)= 0,0956 $\Rightarrow$ 9,6%
c. 5% zwaarste mannen, dus voorbij grens 0.95 invnorm (0.95, 75, 9)= 89.8 kg
Je kan een oproep verwachten vanaf 90 kg
d. 1**-** normalcdf(0, 100, 75, 9)= 0,0027 $\Rightarrow$ 0,0027 $*$ 4800= 13 mannen meer dan 100kg

35a. X =220, μ=210, σ = 8 normalcdf(0, 220, 210, 8)= 0,8944 minder dan 220 gr. $\Rightarrow$ 100 – 89.4 = 10.6% meer dan 220 gr.
b. normalcdf(0,200, 210, 8)= 0,1056 $\Rightarrow$ 10,6% van de pakken lichter dan 200 gram

36a. X =50, μ=36.2 , σ = 12.7 normalcdf(0, 50, 36.2, 12.7)= 0,8592 minder dan 50
$\Rightarrow$ P(meer dan 50 mm) = 1 - 0,8592 = 0,1408 0,1408 $*$ 50= 7 jaren meer dan 50mm
b. X =8, μ=36.2 , σ = 12.7 normalcdf(0, 8, 36.2, 12.7)= 0,0110 $\Rightarrow$
P(minder dan 8 mm) = 0,0110 voor komende maand april

37 X = 60 , μ = 65 , σ = 6 normalcdf(0, 60, 65, 6)=0,2023 $\Rightarrow$ 20,23 %
X = 60 , μ = 62 , σ = 2,5 normalcdf(0, 60, 62, 2,5)=0,2119 $\Rightarrow$ 21,19%
Je hebt uitgerekend de kans dat de batterijen tussen 0 en 60 uur meegaan.
Soort A is betrouwbaarder, kans dat hij meer dan 60 uur mee gaat is 79.8 %

Net zo als **normalcdf(linkergrens, rechtergrens,** μ **,** σ **) = oppervlakte standaardnormaal**
Zo is invnorm(oppervlakte, μ**,**σ **) = score X**

38a. Opp= 0,05 (5%) μ = 3600 en σ = 200 invnorm(0.05 , 3600, 200) = 3271
Bij 3271 branduren wordt er vervangen
b. Een groot deel van de lampen is nog niet defect na 3271 branduren.
Mensen gaan klagen als er veel lampen defect zijn

39a. X =30, μ = 28 , σ = 0.6 normalcdf(0, 30, 28 , 0.6)= 0,9996 $\Rightarrow$
P(meer dan 30 mm) = 1 - 0,9996 = 0,0004 $\Rightarrow$ 0,04% meer dan 30 mm
b. normalcdf(26.5 , 29.5 , 28 , 0.6)= 0,9938 $\Rightarrow$ (1- 0,9938) $*$ 100= 0,62% onbr.baar
c. normalcdf(26.5 , 29.5 , 28 , 0.35)= 0,99998 $\Rightarrow$ (1- 0,99998) $*$ 100= 0,002% onbr.
d. het gaat om gebiedjes met een opp van 20% = 0.2 (linkergrens
invnorm(oppervlakte, μ**,**σ **) = score X ,** dus
dit is de kleinste diameter : invnorm(0.2, 28, 0.35) = 27.97 mm
dit is de grootste diameter : invnorm(0.8, 28, 0.35) = 28.03 mm

40 Elk evenveel exemplaren, dus opp = 0,2   0,4   0,6   0,8
Klasse a: invnorm(0.2 , 75, 18)= 59.9 cm $\Rightarrow$ van 0 tot 60 cm
Klasse b: invnorm(0.4 , 75, 18)= 70,4 cm $\Rightarrow$ van 60 tot 71 cm
Klasse c: invnorm(0.6 , 75, 18)= 79,6 cm $\Rightarrow$ van71 tot 80 cm
Klasse d: invnorm(0.8 , 75, 18)= 90,1 cm $\Rightarrow$ van 80 tot 90 cm
Klasse e: $\Rightarrow$ 90 cm en langer
De middelste klasse = klasse c $\Rightarrow$ van71 tot 80 cm

41a. Opp= 0,1 $\mu = 45$ en $\sigma = 5$ invnorm(0.1 , 45, 5) = 38,6
Je valt af bij een score lager dan 39
b. dus tot 30%. Invnorm(0.3, 45,5) = 42,4
Bij een score vanaf 39 t/m 42 mag je herkansen
c. beste 3% dus opp links = 0.97
invnorm(0.97 , 45, 5) = 54.4   Ze hoort er net niet bij, want 54 is minder dan 54.4

42a. $\mu = 3.8$ m/s en $\sigma = 1.3$ m/s   Score X = 5 m/s
Opp = normalcdf (0, 5, 3.8, 1.3)= 0.8202 $\Rightarrow$ 18% van $365 * 24$ uur = 1577 uur
b. Opp matige wind = normalcdf (3.4, 5, 3.8, 1.3)= 0.6186
$\Rightarrow$ 61.9% van $365 * 24$ uur = 5422 uur

43a. X=5,5 μ =6 en $\sigma = 0.4$ normalcdf(0, 5.5, 6, 0.4)=0,1056 $\Rightarrow$ 10,5% te licht
b. Opp = 0.05, want de zakjes moeten zwaarder zijn
$\Rightarrow$ invnorm(0.05)= -1,6449 = z, μ =? $\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow$

$$\frac{5,5-m}{0,4} = -1,6449 \Leftrightarrow 5,5-\mu = 0,4 * -1,6449 \ (= -0,658) \Leftrightarrow 5,5+0,658 = \mu = 6.158$$

44a. μ = 1005   X = 995 Opp = 0.01 (omdat het naar twee kanten 10 gram kan afwijken mag 1 % minder dan 995 gram bevatten)   Invnorm(0.01)= -2.3263

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow \frac{995-1005}{\sigma} = -2.3263 \Leftrightarrow \frac{-10}{\sigma} = -2.3263 \Leftrightarrow \frac{-10}{-2.3263} = 4.3 = \sigma$$

b. σ = 8,   z = invnorm(0.05)= -1.6449   X = 1000 μ = ?

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow \frac{1000-\mu}{8} = -1.6449 \Leftrightarrow 1000 - \mu = -1.6449 * 8 \Leftrightarrow 1000 - \mu = -13.16$$

Dus μ = 1013,2 gram

45a. μ = 70 gr. σ = 20 gr jaarlijks 10000 brieven
Hoeveel % is tussen 50 en 100 gram?
Normalcdf(50, 100, 70, 20) = 0.7745 dus $0.7745 *$ 10000 = 7745 brieven

b.

Gewicht in gr	Tarief	%	Aantal	kosten
0-20	0.39	0.598	61	23.97
20-50	0.78	15.24	1525	1189.50
50-100	1.17	77.45	7745	9061.25
100-250	1.56	6.68	669	1043.64
totaal			10000	11318.36

c. lichtste 25% dus opp = 0.25 invnorm(0.25, 70, 20) dus t/m 57 gram
zwaarste 15% dus opp = 0.85 invnorm(0.85, 70, 20) dus boven 91 gram

Gewicht in gr	Tarief	%	Aantal	kosten
0-57	0.50	25.8	2577	1288.50
57-91	0.75	59.53	5953	4464,75
91-250	1.00	14.69	1470	1470
totaal			10000	7223.25

Het is een stuk goedkoper (dat had je ook aan de tarieven kunnen zien)

46a. μ = 2.52 kg. σ = 0.12 kg X = 2.5 kg
Normalcdf(0, 2.5, 2.52, 0.12) = 0.4338 dus 43,38% is te licht
b. μ = 2.56 kg. σ = 0.12 kg gewicht tussen 2.26 en 2.86 kg
Normalcdf(2.26, 2.86, 2.56, 0.12) = 0.9876 dus 1.24% wijkt 0.3 kg af
c. 4% dus opp = 0.04 en z = invnorm(0.04) =-1.7507 σ = 0.12 kg μ = ?

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow \frac{2.5-\mu}{0.12} = -1.7507 \Leftrightarrow 2.5 - \mu = -1.7507 * 0.12 \Leftrightarrow \mu = 2.71 \text{ kg}$$

d. $\frac{16}{853} * 100 =$ 1.88% is zwaarder, dus linkeropp = 0.9812 en z = invnorm(0.9812) = 2.08

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow \frac{2.78-\mu}{0.12} = 2.08 \Leftrightarrow 2.78 - \mu = 2.08 * 0.12 \Leftrightarrow \mu = 2.53 \text{ kg}$$

47a. μ = 2010 σ = 33 normalcdf(1970, 2005, 2010, 33) = 0.3271 dus 32.7% verbruikt
b. linkeropp = 0.8 invnorm (0.8, 2010, 33) = 2037.8
Dus ergens in de tweede helft van het jaar 2037
c. Beetje rare vraag, omdat juist zo'n oorlogssituatie vaak tot een afwijking van de norm leidt, maar goed: normalcdf(1940, 1945, 2010, 33) = 0.075 dus 7.5%
d. normalcdf(2000, 2005, 2010, 33) = 0.0589
$0.0589 * 1800105.93$ Gb
e. Er was 1800 Gb, gebruikt = 800 Gb dat is $\frac{800}{1800} = 0.444$ deel = linkeropp.
En z = invnorm(0.444)= -0.1397

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = z \Leftrightarrow \frac{2005-2010}{\sigma} = -0.1397 \Leftrightarrow \frac{-5}{\sigma} = -0.1397 \Leftrightarrow \frac{-5}{-0.1397} = 35.8 \text{ jaar} = \sigma$$